Construction du milieu d'un segment au compas

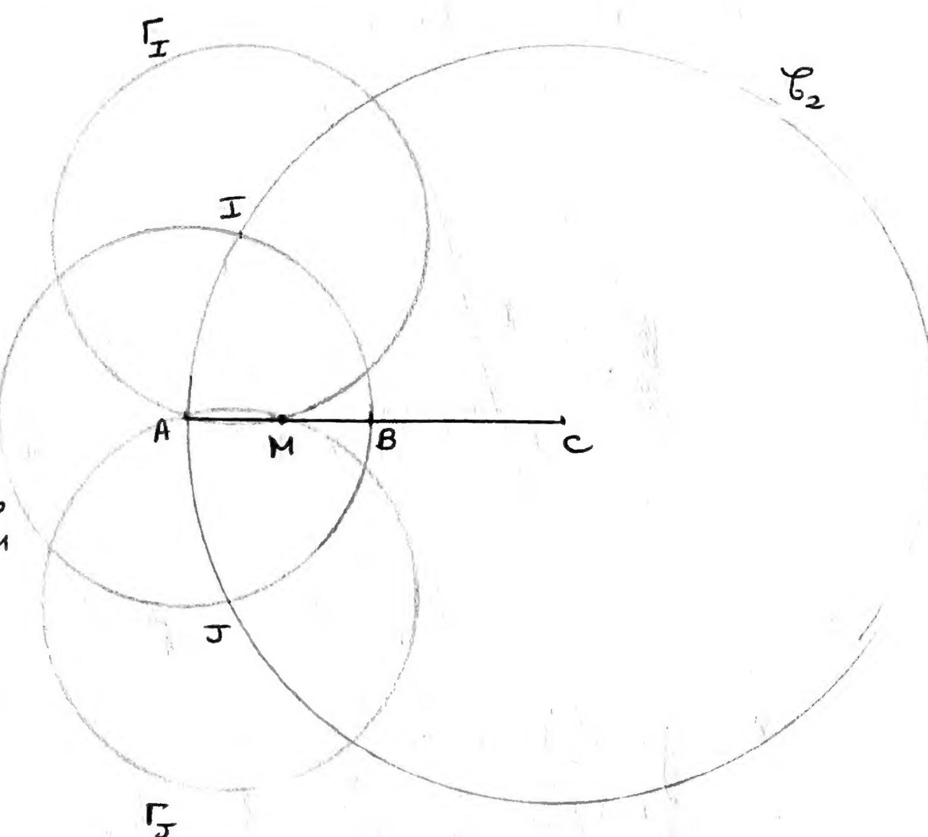
B milieu de [AC]

Le cercle $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(A, AB)$ coupe le cercle $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(C, CA)$ en 2 points I et J.

Construire les cercles Γ_I et Γ_J de centres I et J et passant par A.

Γ_I et Γ_J se coupent en A et M.

Mq M est le milieu de [AB]



<u>Application</u> : Construire, au compas seul, le milieu d'un segment donné.

* <u>IAJM est un losange</u> : en effet, $AI = AJ$ car $I, J \in \mathcal{C}_1$, $IA = IM$ car $M \in \Gamma_I$ et $JM = JA$ car $M \in \Gamma_J$. Ainsi, <u>(AM) sera la médiatrice de [IJ]</u>.

* On montre facilement que I et J sont symétriques /à (AB). Vu ce qui précède, on aura nécessairement

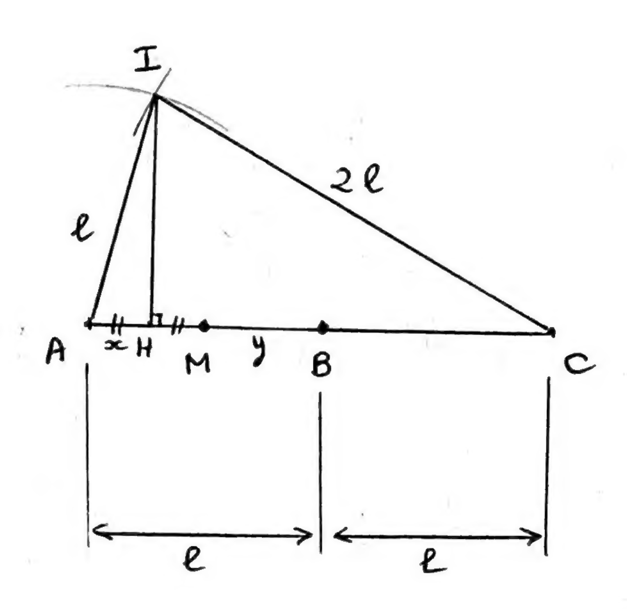
$$(AM) = (AB)$$

ie <u>A, B, M alignés</u>.

(réf. Geometria del compasso, Lorenzo Mascheroni, 1797 : Toute figure construite à la règle et au compas peut être construite au compas seul)

(réf. Terracher TCE 92 I p103)

* Notons H la hauteur issue de I du triangle IAC.



Posons $\begin{cases} AI = l \text{ donné} \\ AH = x \\ MB = y \end{cases}$

On a $\begin{cases} 2x + y + l = 2l \\ IH^2 = l^2 - x^2 = (2l)^2 - (x+y+l)^2 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} y = l - 2x & (1) \\ 2l^2 - y^2 - 2xy - 2xl - 2yl = 0 & (2) \end{cases}$

En substituant y en fonction de x du (1) dans (2) :

$$4lx = l^2$$

$$x = \frac{l}{4}$$

donc <u>M milieu de [AB]</u>. CQFD

Le cercle et l'Équerre

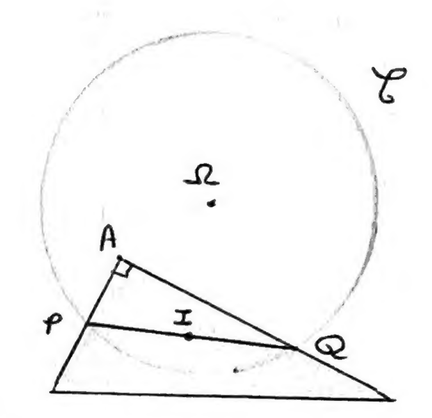
Le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et le pt A sont fixés. On fait tourner une équerre autour du point A et on note P et Q les points d'intersection des bords de l'équerre avec le cercle $\mathscr{C}$.

Quel est le lieu géométrique du milieu I de [PQ] ?

Ind : une ligne de niveau de

$M \mapsto MA^2 + M\Omega^2$

est impliquée...



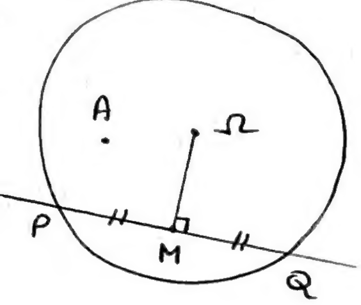
$\mathscr{E}$ = ensemble cherché.

* Si $M \in \mathscr{E}$, $MA^2 + M\Omega^2 = MP^2 + M\Omega^2 = R^2$ (Th. médiane dans APQ)

* Réc., si $MA^2 + M\Omega^2 = R^2$, la perpendiculaire à $(M\Omega)$ en M coupe $\mathscr{C}$ en P et Q.

$\begin{cases} MA^2 = R^2 - M\Omega^2 = PM^2 \\ M \text{ milieu de } [PQ] \end{cases}$ $\Rightarrow$ PAQ rectangle en A

$\Rightarrow M \in \mathscr{E}$.



• ex. d'entraînement - Mettre l'accent sur la réciproque qui passera ~~souvent~~ inaperçue

…/…

(M) Terracher TCE 92 I, p 97)

Ainsi : $\mathcal{E} = \{M \ / \ MA^2 + M\Omega^2 = R^2\}$

Soit G le barycentre de $A(1)$, $\Omega(1)$. C'est le milieu de $[A\Omega]$.

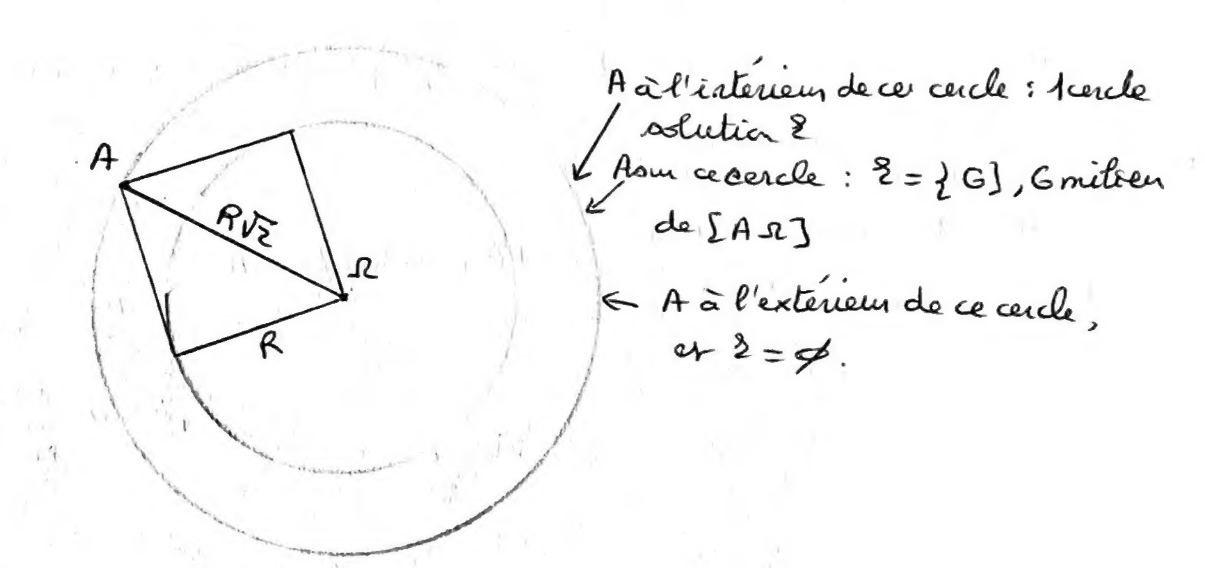
$$MA^2 + M\Omega^2 = R^2 \iff 2MG^2 + GA^2 + G\Omega^2 = R^2$$

$$MG^2 = \frac{1}{2}\left(R^2 - 2GA^2\right)$$

$$MG^2 = \frac{1}{2}\left(R^2 - \frac{\Omega A^2}{2}\right)$$

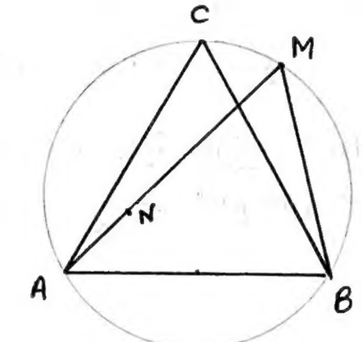
NB : $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G milieu de $[\Omega A]$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}\left(R^2 - \frac{\Omega A^2}{2}\right)}$ lorsque $R^2 \geq \frac{\Omega A^2}{2}$, ie $\boxed{R\sqrt{2} \geq \Omega A}$. On le construit facilement en cherchant 1 seul pt $I \in \mathcal{E}$: c'est le cercle $\mathcal{C}(G, GI)$.

La condition $\Omega A \leq R\sqrt{2}$ d'existence de solution peut se "vivre" géométriquement ainsi :



• Réfléchir au sens de la condition d'existence de solutions $\Omega A \leq R\sqrt{2}$

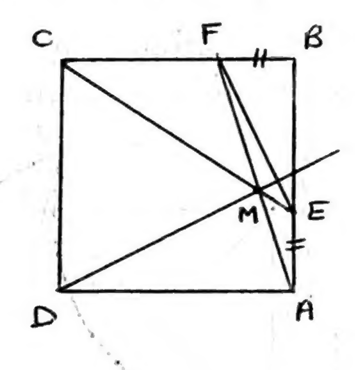
① ex : Soit un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle Γ. γ est l'arc $\widehat{BC}$ de γ ne contenant pas A.
M étant un pt de γ distinct de B et de C, placer le pt N de la demi-droite [MA) tel que MN = MB. Prouver que N ∈ [MA]. On oriente le plan de façon que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$ [2π].
Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Quelles sont les images de C et M par r ?
En déduire que pour tout M de γ : MA = MB + MC



(Sol : AG18 Capes int. 92, 2e comp.)

---

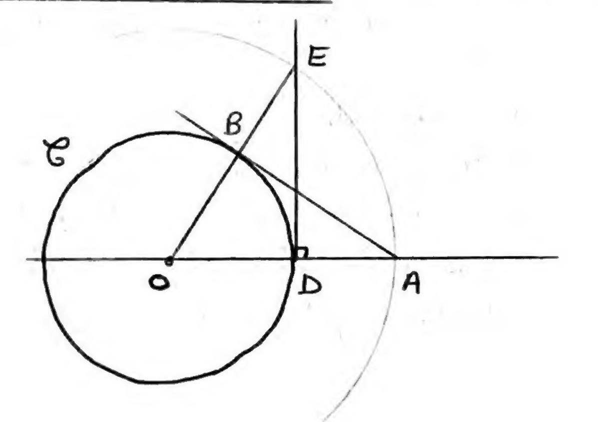
② Term. : La figure ci-contre représente un carré ABCD. (AF) et (EC) se coupent en M.
Montrer que (DM) ⊥ (EF)



Sol. : Il suffit de montrer que M est l'orthocentre de DEF. Cela revient à prouver que (AF) et (EC) sont des hauteurs du triangle DEF.
Vérifions que (DE) ⊥ (AF) : le quart de tour r de centre le centre O du carré et transformant A en B va transformer D en A, et E en F (en effet si r(E) = E', E étant sur la perpendiculaire à (AD) passant par A, E' sera sur la perpendiculaire à (AB) passant par B. De plus E ∈ [AB] ⇒ E' ∈ [BC] et E'B = EA = FB assureront E' = F). L'image de la dte (DE) par le quart de tour r sera donc (AF). CQFD
(réf. Tenacher 92 I p139)

---

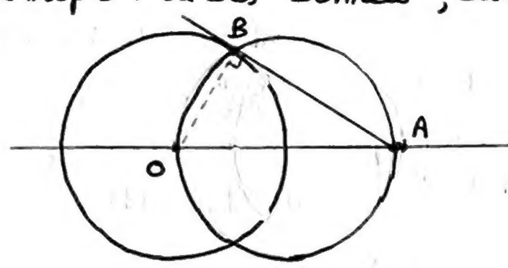
③ Construction de la tgte à un cercle, d'après Euclide (3e s av JC) (niveau 3ème)
(réf. Hocquenghem 80 p149)
Dans son livre III "Éléments", prop. 17, Euclide explique ce tracé de la tangente à 𝒞 passant par un pt A extérieur à 𝒞 :
(OA) coupe 𝒞 en D, et la perp. à (OA) en D coupe le cercle 𝒞(O, OA) en E. (OE) coupe 𝒞 en B et (AB) sera la tgte cherchée.



Justifier cette construction.

Sol : Par rotation de centre O amenant A sur E, D est transformé en B, et la rotation conservant l'orthogonalité transformera (DE), perp. à (OD), en (AB) perpendiculaire à (OB). CQFD

<u>Autre méthode</u> : dans la Prop 91 de ses "Données", Euclide donne la méthode plus rapide :



④ <u>Triangle équilatéral inscrit dans un carré</u> : Dans le "livre des constructions géométriques nécessaires à l'artisan", le mathématicien arabe Aboul-Wafa (940-997) explique sans démonstration, la construction d'un triangle équilatéral dans un carré donné (fig 1)

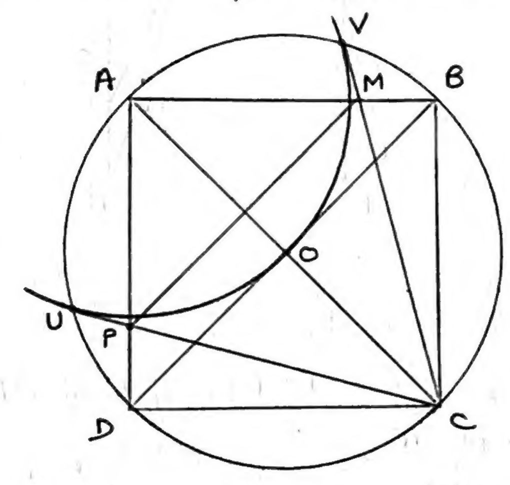


fig 1 : MPC est équilatéral

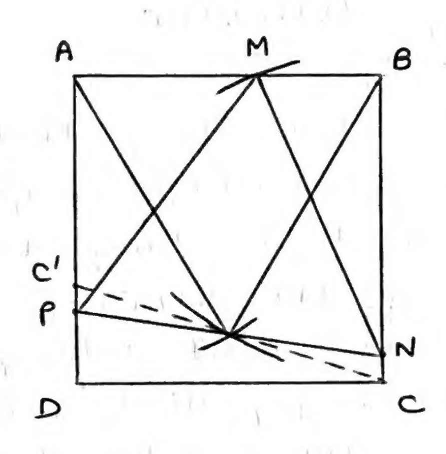


fig. 2

Sol : (AB) et (AD) sont sym. / à (AC) et (CV) et (CU) " " $\Rightarrow$ M et P sont sym. / à (AC) $\Rightarrow$ CM = CP

On montre alors que $\widehat{MCP} = 60°$. Le triangle OVA est équilatéral, donc

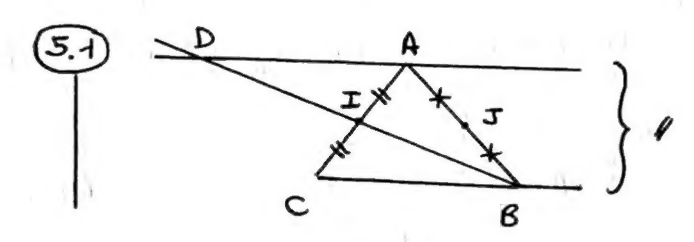
$$\widehat{\overrightarrow{CU},\overrightarrow{CV}} = 2\ \widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CV}} = \widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OV}} = 60° . \quad \text{CQFD}$$

<u>Prolongements</u> : la fig. 2 indique comment on obtient tous les triangles équilatéraux MNP inscrits dans le carré ABCD. L'utilisation des symétries a permis de se ramener au cas où M ∈ [AB], N ∈ [BC] et P ∈ [AD] seulement dessiné ici. La preuve constitue la III-partie du CAPES interne 92, 2- comp., AG18, qui est entièrement indépendante des précédentes. On y utilise les nbres complexes...

⑤ Exercices de 4ème utilisant la symétrie centrale

Les ex. suivants font partie d'une recherche didactique sur l'enseignement de la démonstration et l'utilisation du logiciel d'aide à la démonstration D.E.F.I ("Aide logicielle à la résolution de pb avec preuve ..., de S.A. Almoloud, Recherches en didactique des Math., Vol 12/2.3 pp271-318, ed. La pensée sauvage, 1992) (BIUFM)

(5.1)

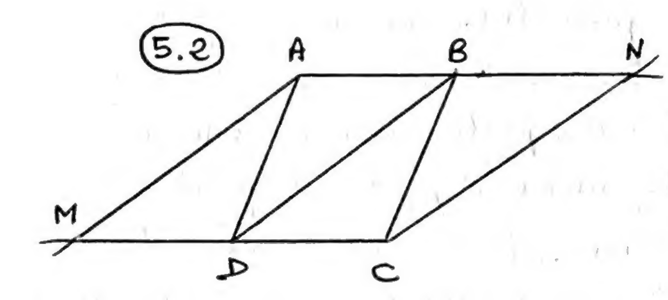


Mq ABCD est un parall.

Sol. : Le Th ddm entraine (IJ)//(BC), comme (AD)//(BC) on aura (IJ)//(AD) et le Th. ddm prouve que I est le milieu de [BD]. CQFD

Autre Sol. : La sym. /à I transforme C en A et (BC) en la // à (BC) passant par A, soit (AD), ..., donc D est le sym. de B /à I, ... CQFD

(5.2)



ABCD parall.
La parall. à (BD) passant par A coupe (CD) en M
" " " C " (AB) en N
Mq BNDM est un parallélogramme

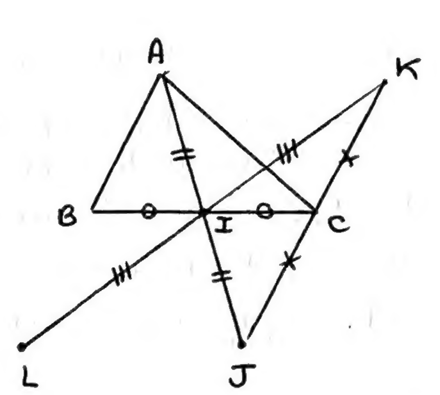
NB : L'article propose de localiser les sous-figures ABDM et BNCD, de prouver qu'il s'agit de parall., et d'en déduire que (BN)//(DM) et BN=DM pour conclure. Il manque qque chose : BNDM non croisé !
L'article propose une 2e sol. : prouver que ANCM est un parall., d'où AN=CM, puis en déduire BN=MD et terminer comme ci-dessus. On n'a tjrs pas montré que BNDM n'était pas croisé. Je préfère donc :

Sol : On montre que ABDM et BNCD sont des parall., puis en 3ème, on utilise les vecteurs et la relation de Chasles. L'outil est puissant et justifie l'introduction de ces notions. Ici :

$$\vec{BN} = \vec{AB} = \vec{DC} = \vec{MD} \Rightarrow \text{BNDM parallélogramme}.$$

Autre Sol : La symétrique de (AM) /au centre O du parall. ABCD sera la dte passant par C et // à (AM), ie (CN). De m̂, la sym. de (CM) est (AN). On déduit que le sym. de M /à O est N, ... CQFD

(5.3) On construit pas mal de symétriques pour obtenir la figure :
Mq B est le milieu de [AL]



Sol : Mq ACJB et BLCK sont des parall, ...

Autre Sol. : La sym. /à I transforme le milieu C du segment [KJ] en le milieu B du segment image [AL].

(5.4) E, F, G, H sont les milieux des côtés du parall. ABCD (fig. ci-contre)

Les dtes (AF), (CH), (DE), (BG) se coupent comme indiqué sur la figure. Mq PQMN est un parallélogramme.

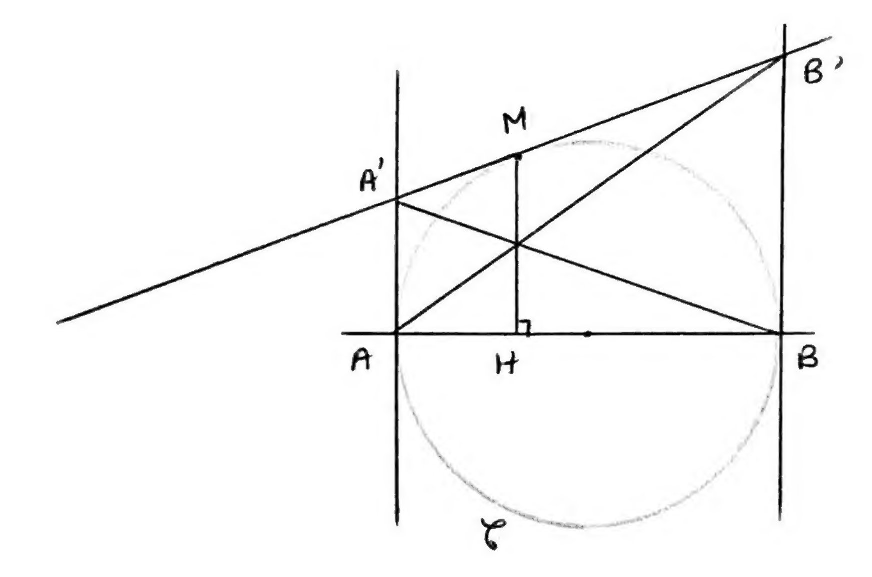
La preuve donnée dans l'article est incomplète : elle consiste à montrer que BEDG est un parallélogramme à partir des seuls renseignements (EB) // (DG) et EB = DG. Il manque toujours la condition "BEDG n'est pas croisé" pour conclure. En recommençant avec AFCH, on constate finalement que les côtés opposés de MNPQ sont // 2 à 2 ...

Pour faire fonctionner cette preuve incomplète, il s'avère utile de faire intervenir la symétrie s par rapport au centre O du parall. ABCD :

Sol : s conserve les milieux, donc transformera le milieu E de [AB] en le milieu G de [CD]. Comme s(D) = B, on constate que (BG) sera la symétrique de (DE) /à O. D'où (BG) // (DE).
De m̂, on prouverait que (AF) // (HC), ... CQFD

NB : ABCD et MNPQ auront m̂ centre de symétrie.

Prolongements : dessiner un parall. dans le parall. MNPQ en procédant de la m̂ manière, et ainsi de suite... Recommencer avec ABCD rectangle, ou losange ...



[AB] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$, les tgtes à $\mathscr{C}$ en A et B coupent resp. la tgte en M, en A' et B'. H désigne la proj. orth. de M sur (AB).
Mq les dtes (A'B), (AB'), (MH) sont concourantes.

<u>Solution analytique</u> : Repère orthonormal tq $O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathscr{C} : x^2+y^2=1$.

Soit I le milieu de [MH] et $M\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$.

$I\begin{pmatrix}x_0\\\frac{y_0}{2}\end{pmatrix}$

(A'B') : $x_0x+y_0y=1$

$A'\begin{pmatrix}-1\\\frac{1+x_0}{y_0}\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $I\begin{pmatrix}x_0\\\frac{y_0}{2}\end{pmatrix}$ sont alignés (cf déterminant)

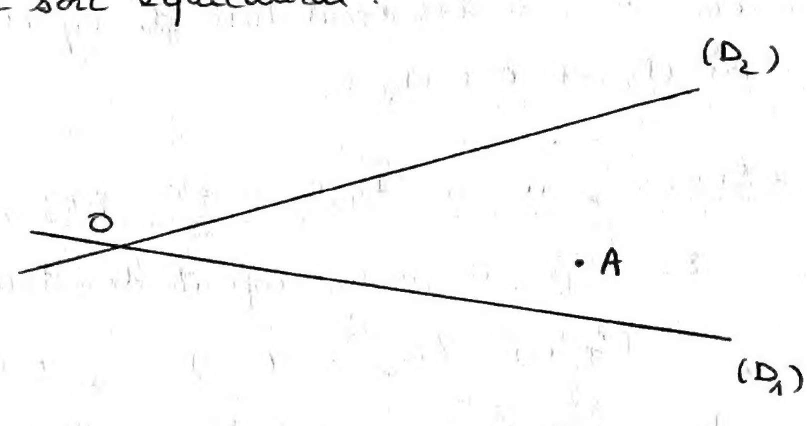
donc $I \in (A'B)$.

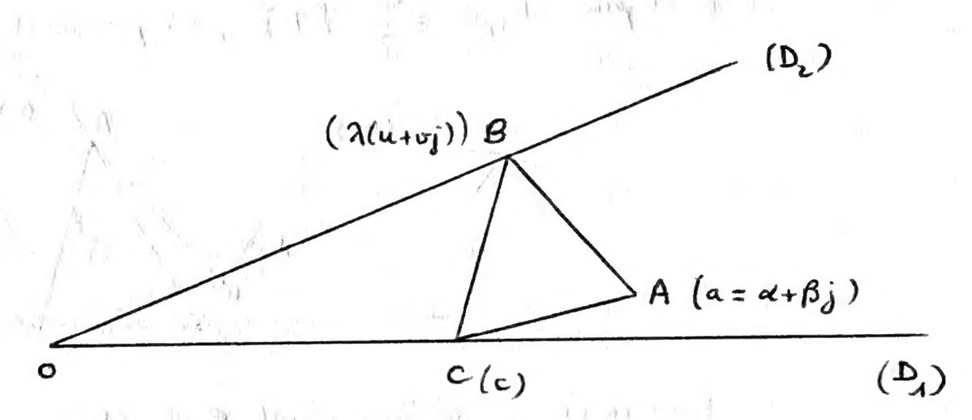
On vérifie de m que $I \in (AB')$. (...)

(Fractale (90?) de 1ère S)

14/6/93

On se donne 2 droites sécantes en O et un point A.
Trouver B et C sur chacune de ces 2 droites et tels que le triangle ABC soit équilatéral.





On note a, b, c les affixes de A, B, C dans repère orthonormal direct d'origine O.

ABC est un triangle équilatéral <u>direct</u> ssi $b-c=-j^2(a-c)$

Notons : $\begin{cases} b=\lambda b_0, \text{ où } \lambda\in\mathbb{R} \text{ et } b_0=u+vj \\ c\in\mathbb{R} \\ a=\alpha+\beta j \quad ; \alpha,\beta\in\mathbb{R} \end{cases}$ $(u, v\in\mathbb{R}$ donnés$)$

ABC est un triangle équilatéral direct solution ssi :

$$\lambda(u+vj)-c=-j^2(\alpha+\beta j-c)$$

$$\lambda u-c+\lambda vj=\alpha-c-\beta+j(\alpha-c)$$

$$\begin{cases} \lambda u=\alpha-\beta \\ \lambda v=\alpha-c \end{cases} \quad (*)$$

d'où la discussion :

* Si $u \neq 0$, le système (*) est de Cramer et admettra un unique couple solution. C'est $(\lambda, c) = \left(\frac{\alpha-\beta}{u}, \alpha - \frac{\alpha-\beta}{u} . v \right)$

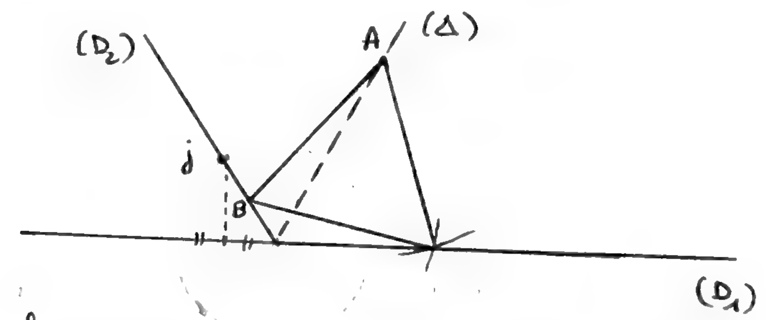
Dans ce cas, il existe 1 et 1 seul triangle équilatéral direct ABC avec $B \in (D_1)$ et $C \in (D_2)$.

* Si $u = 0$, ie si $\widehat{D_1, D_2} \equiv \frac{2\pi}{3}$ $[\pi]$,

- Si $\alpha = \beta$, il y a une infinité de solutions, les :

$(\lambda, c) = (t, \alpha - tv)$, $t \in \mathbb{R}$

Dire que $\alpha = \beta$ équivaut à dire que A appartient à la droite (Δ) définie par $\widehat{D_1, \Delta} \equiv \frac{\pi}{3}$ $[\pi]$, et passant par O.



Dans ce cas, à chaque point B de (D_2) on peut associer un et 1 seul pt C de (D_1) tel que ABC soit un tri. équil. direct (fig. ci-dessus)

- Si $\alpha \neq \beta$, ie si $A \notin (\Delta)$, il n'y a pas de solution.

Recherche des triangle ABC équilatéraux indirects :

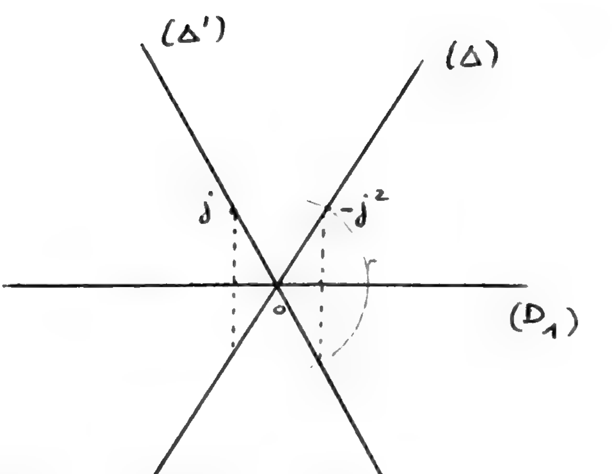
On recommence les calculs ci-dessus pour chercher, cette fois-ci, les triangles équilatéraux indirects ABC solutions du problème. On trouve, de même :

* Si $\widehat{D_1, D_2} \not\equiv \frac{2\pi}{3}$ $[\pi]$, 1 seule solution indirecte

* Si $\widehat{D_1, D_2} \equiv \frac{\pi}{3}$ $[\pi]$,

- Si $A \in (\Delta')$ où $\widehat{D_1, \Delta'} \equiv \frac{2\pi}{3}$ et $O \in \Delta'$, une infinité de solutions indirectes
- Si $A \notin (\Delta')$, pas de solution indirectes

14/6/93



Ccl :

* Si $(D_2) \neq (\Delta)$ et $(D_2) \neq (\Delta')$, il existe 1 triangle équil. direct et 1 triangle équil. indirect solution.

* Si $(D_2) = (\Delta)$, il y a :
  - 1 seul triangle équil. direct solution (quelque soit A)
  - Aucun triangle indirect solution si $A \notin (\Delta')$
    Une infinité de triangles indirects solution si $A \in (\Delta')$

* Si $(D_2) = (\Delta')$, il y a :
  - Aucun triangle direct solution si $A \notin (\Delta)$
    Une infinité de triangles directs solution si $A \in (\Delta)$
  - 1 seul triangle indirect solution.

Objectifs : – Utiliser la caractérisation des triangles équilatéraux directs (resp. indirects) nécessitant l'emploi des complexes
– Faire un raisonnement algébrique dans $\mathbb{C}$ pour montrer des résultats géométriques

Prolongements :

a) Faire dessiner certains triangles solution.

Ainsi, pour $u + vj = j$ et $\alpha + \beta j = -1 - 2j$

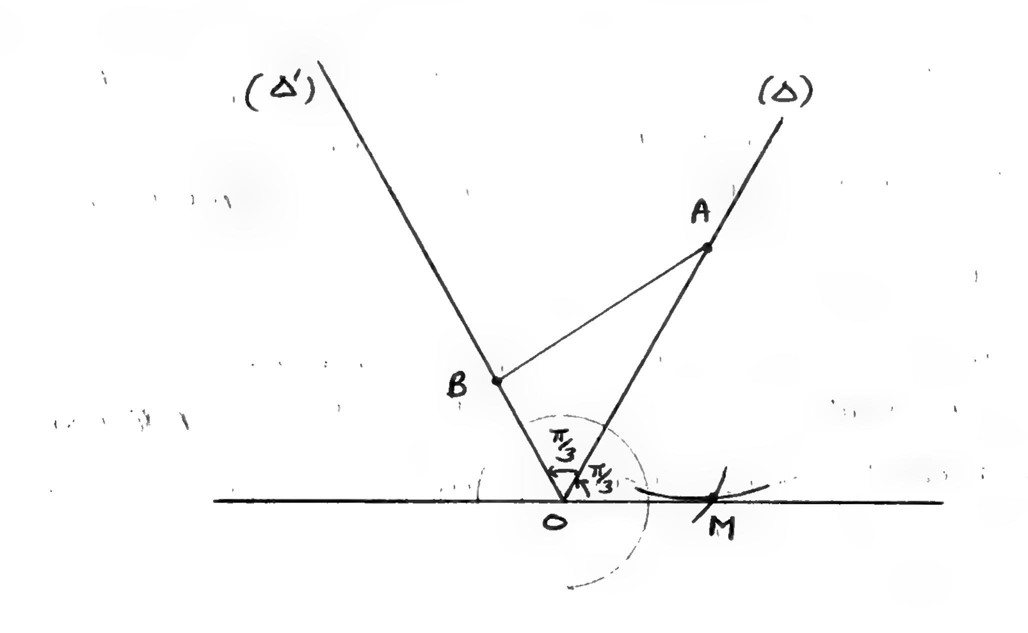
trouve-t-on : $\lambda = 1$ et $c = 2$

D'où le dessin :

B(j)
(D_1)
1
C(2)
$(-i\sqrt{3}) = (-1-2j)$ A

b) Faire remarquer que l'on a obtenu le résultat intéressant :

Si $\widehat{D_1, \Delta} = \frac{\pi}{3}\ [\pi]$ et $\widehat{D_1, \Delta'} = \frac{2\pi}{3}\ [\pi]$ dans la figure ci-dessous, pour tout $A \in (\Delta)$ et $B \in (\Delta')$, l'unique point M tel que ABM soit un triangle équilatéral direct, appartient à (D_1).

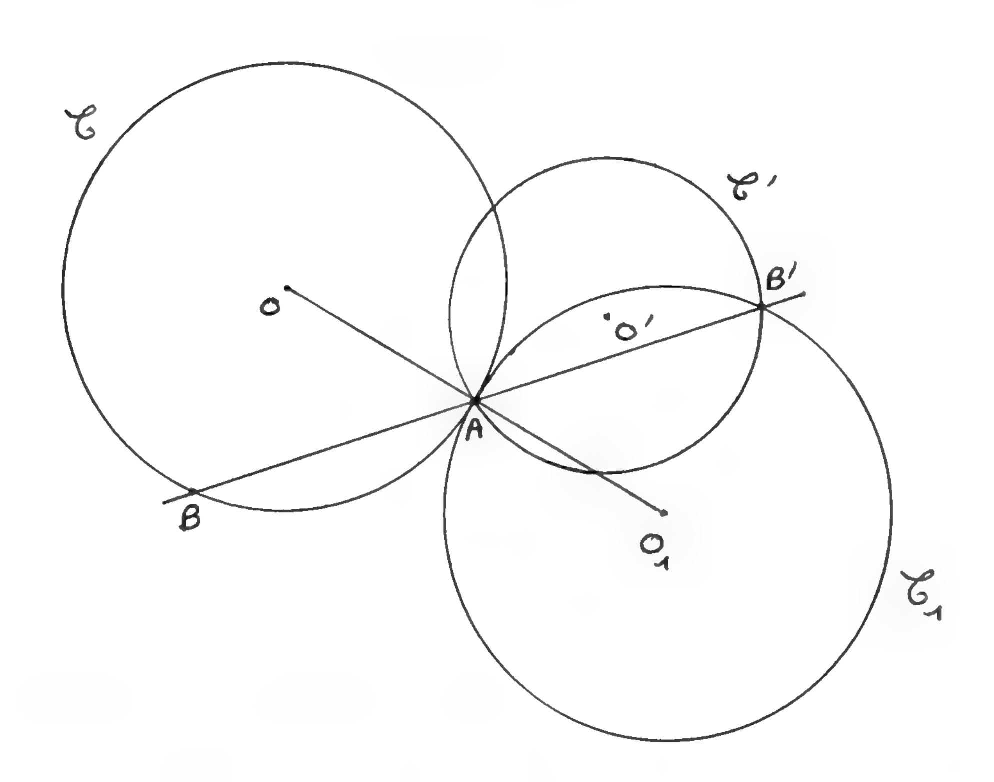


Problème de construction

On se donne 2 cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et l'on appelle A l'un des points d'intersection de ces 2 cercles. Trouver $B \in \mathcal{C}$ et $B' \in \mathcal{C}'$ tels que A soit le milieu de [BB']. Que se passe-t-il si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents

Remarque : dans la résolution d'un problème géométrique, il y a 3 étapes :

1) Étude de la figure
2) Construction
3) Discussion



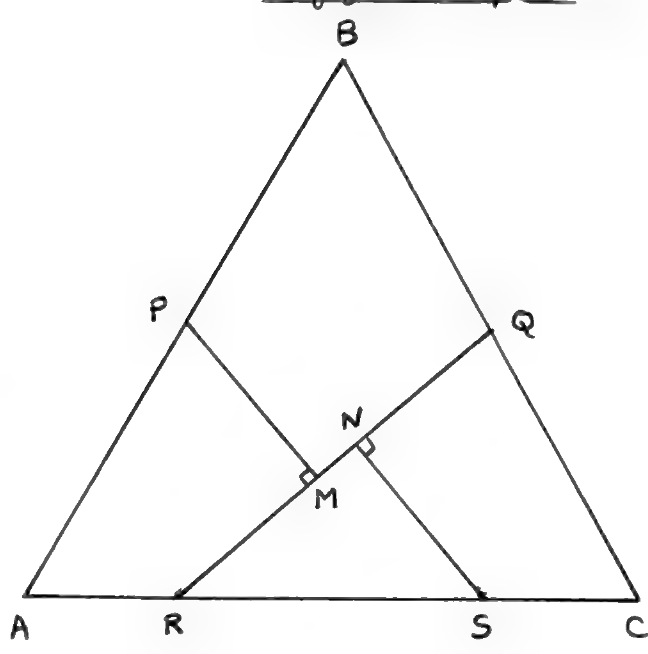
* Si B et B' sont solutions, $B' = s_A(B)$ donc $B' \in \mathcal{C}' \cap s_A(\mathcal{C})$.
Réciproquement, les points B' de $\mathcal{C}' \cap s_A(\mathcal{C})$ répondent à la question.

* Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents :
  - Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ n'ont pas le m̂ rayon, $\mathcal{C}' \cap s_A(\mathcal{C}) = \{A\}$ et seul $B = B' = A$ est solution.
  - Si les rayons de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont égaux, $\mathcal{C}' \cap s_A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ et tous les points B' de $\mathcal{C}'$ donnent une solution.

(réf. IPR Lorraine)

Infirmer une conjecture

1) Construire un tri. équil. ABC de 16 cm de côté et placer les milieux P et Q de [AB] et [BC]. Tracer R et S sur [AC] tels que AR = CS = 4 cm. Tracer [RQ]. M et N désignent les projetés orthogonaux de P et S sur (RQ). Tracer les segments [PM] et [NS].



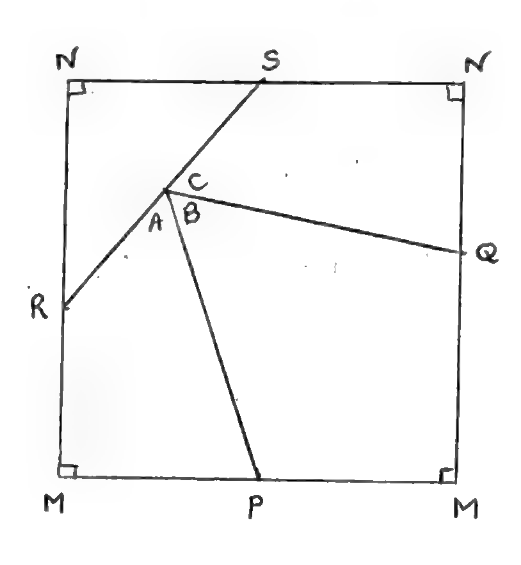
2) Découper suivant les segments obtenus puis vérifier que l'on peut assembler les 4 morceaux pour former un rectangle. Le coller sur la feuille réponse.

3) Est-ce un carré ? Pour le savoir, calculer les dimensions du rectangle en justifiant...

(réf. APMEP n° 382 (fév. mars 92))

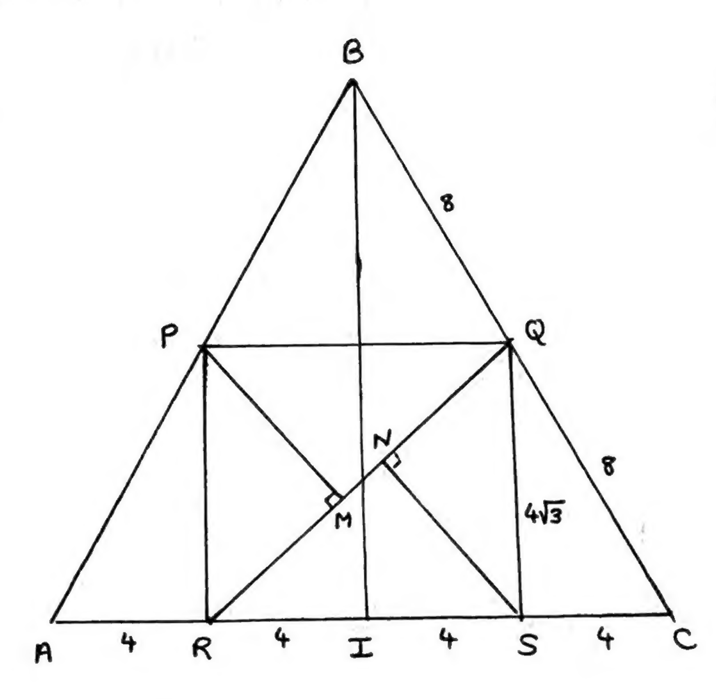
---

2) On obtient, après collage :



C'est un rectangle et pour savoir s'il s'agit d'un carré, il faut, par ex., savoir si 2.SN = NQ + QM .

Est-ce vraiment un carré ? ...



Question : A-t-on $2.SN = NQ + QM$?

$BI = 16\frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ (hauteur d'un tri. équil.)

(BI)//(QS) d'après Thalès, donc $QS = \frac{BI}{2} = 4\sqrt{3}$ d'après Thalès dans le triangle.

On localise le rectangle PQSR, d'où :

* Pythagore : $QR = \sqrt{QS^2 + RS^2} = \sqrt{16.3 + 64} = 4\sqrt{7}$

Dans le tri. rect. SQR : $\underbrace{SR}_{8} . \underbrace{QS}_{4\sqrt{3}} = SN . \underbrace{QR}_{4\sqrt{7}} \Rightarrow$ $\boxed{SN = 8\sqrt{\frac{3}{7}}}$

D'où (Pythagore) : $NQ = \sqrt{QS^2 - SN^2} = \sqrt{48 - 64.\frac{3}{7}} = \frac{12}{\sqrt{7}}$ soit $\boxed{NQ = \frac{12}{\sqrt{7}}}$

* Cherchons QM : il suffit de travailler dans le tri. rect. PQR :

$$PM . RQ = PR . PQ \Rightarrow PM . 4\sqrt{7} = 4\sqrt{3} . 8 \Rightarrow PM = 8\sqrt{\frac{3}{7}}$$

d'où (Pythagore) : $QM = \sqrt{PQ^2 - PM^2} = \sqrt{64 - 64.\frac{3}{7}} = \frac{16}{\sqrt{7}}$

$\boxed{QM = \frac{16}{\sqrt{7}}}$

Si on obtenait un carré, on aurait $2.SN = NQ + QM$ soit :

$$2 \times 8\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{12}{\sqrt{7}} + \frac{16}{\sqrt{7}}$$

$$16\sqrt{3} = 28$$

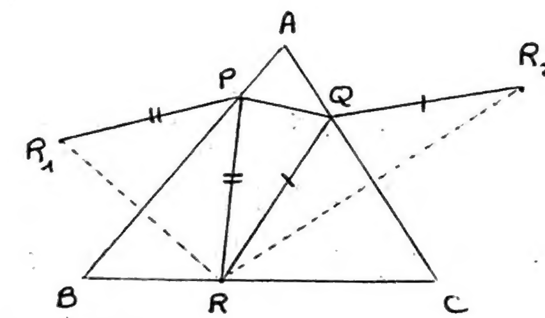
$\sqrt{3} = \frac{7}{4}$ ce qui est absurde

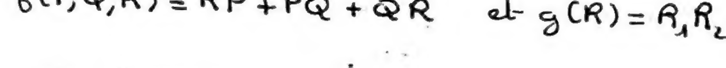
NB : Il s'agit presque d'un carré, car $\sqrt{3} = 1,732...$ et $\frac{7}{4} = 1,75$ (!)

TRIANGLE DE PERIMETRE MINIMUM INSCRIT DANS UN TRIANGLE

But : Construire un triangle PQR de périmètre minimum inscrit dans un triangle acutangle ABC.

Utilisons les symétriques R_1 et R_2 de R /à (AB) et à (AC) dans la figure ci-contre, et posons :





$$f(P,Q,R) = RP + PQ + QR \quad \text{et} \quad g(R) = R_1R_2$$

a) Montrer que :

$\forall P \in [AB] \quad \forall Q \in [AC] \quad \forall R \in [BC] \quad f(P,Q,R) \geq g(R)$

puis que $g(R)$ atteind son minimum en un seul point du segment [BC].

b) Notons I, J, K les pieds des hauteurs issues de A, B, C du triangle ABC. On admet (T Triangle) que "les hauteurs du triangle ABC coïncident avec les bissectrices des angles du triangle orthique IJK".

Montrer que si I_1 (resp. I_2) est le symétrique de I /à (AB) (resp. (AC)), alors I_1, I_2, J et K sont alignés.

c) Conclure.

a) Comme $f(P,Q,R) = R_1P + PQ + QR_2$, on obtient $f(P,Q,R) \geq R_1R_2 = g(R)$ par l'inégalité triangulaire. Cherchons quand $g(R)$ est minimum :

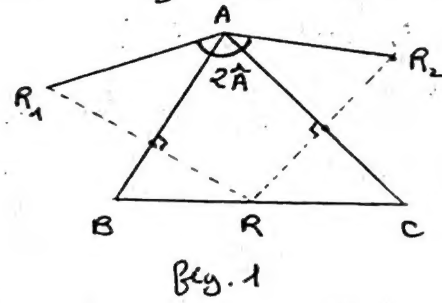


fig. 1

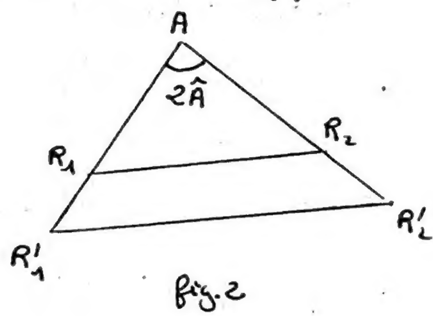


fig. 2

$\widehat{R_1AR_2} = 2\hat{A}$ est constant, si bien que pour 2 choix différents R et R' de R sur [BC], en notant R'_1 (resp. R'_2) le symétrique de R' /à (AB) (resp (AC)), on obtienne la fig. 2 pour une rotation de centre A convenable. $g(R) = R_1R_2$ sera alors minimale dès que $AR_1 = AR$ l'est, ie <u>dès que R est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC</u>.

2e solution c/ou prolongement : La formule d'Al Kashi dans la fig. 1 donne

$$R_1R_2^2 = AR_1^2 + AR_2^2 - 2\,AR_1 . AR_2 \cos 2\hat{A} = 2AR^2(1-\cos 2\hat{A}) = 4\,AR^2 \sin^2 \hat{A}$$

donc $g(R) \doteq R_1R_2 = 2 . AR . \sin \hat{A}$.

$g(R)$ sera donc minimum quand AR l'est, ie quand $R = I$ = pied. hauteur.

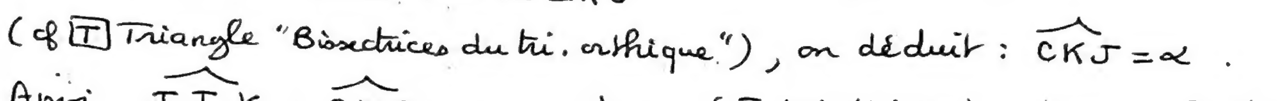
b) Mq I_1, J, K sont alignés :

$\widehat{KI_1I} = \widehat{I_1IK} \doteq \alpha$

$\widehat{I_1IK} = \widehat{IKC}$ car $(II_1) // (KC)$

(puisque perpendiculaires à (AB).

Comme (KC) est bissectrice de $\widehat{IKJ}$



(cf [T] Triangle "Bissectrices du tri. orthique"), on déduit : $\widehat{CKJ} = \alpha$.

Ainsi $\widehat{II_1K} = \widehat{CKJ} = \alpha$, donc $(I_1K) // (KJ)$, donc $(I_1K) = (KJ)$.

fig. 3

c) D'après b) : $f(K, J, I) = I_1K + KJ + JJ_1 = I_1J_1 = g(I)$

D'après a) : $\forall (P, Q, R) \in [AB] \times [AC] \times [BC]$ $\quad f(P, Q, R) \geqslant g(R) \geqslant g(I)$ $\quad (*)$

donc $\forall P, Q, R$ $\quad f(P, Q, R) \geqslant g(I) = f(K, J, I)$

C'est le triangle orthique IJK qui réalise le périmètre minimum.

NB : • IJK est le seul triangle solution car si $I \neq R$ (par ex.), le a) assure $g(R) > g(I)$ et $(*)$ entraine $f(P, Q, R) > f(K, J, I)$

• L'hypothèse ABC est acutangle assure que les points I, J, K appartiennent aux segments $]BC[$, $]CA[$, $]AB[$.

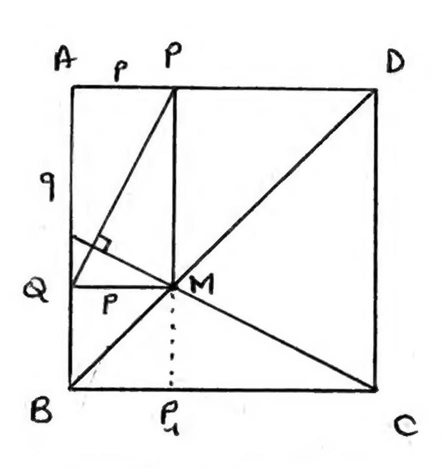
• 2ème solution pour le b) : Soient s_{AB} (resp. s_{KC}) la réflexion d'axe (AB) (resp. (KC)). $s_{KC} \circ s_{AB}$ est la symétrie s_K /à K puisque $(KC) \perp (AB)$, et $s_{KC} \circ s_{AB}(I_1) = J$ (on admet tjrs que (KC) est la bissectrice de $\widehat{IKJ}$) donc K sera le milieu de $[I_1J]$.

Prolongement : Le périmètre du triangle orthique IJK de ABC est $\dfrac{8.S^2}{abc}$ où S est l'aire du triangle ABC, $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

preuve : Ce périmètre est $I_1I_2 = 2 . AI . \sin \hat{A}$ (cf a)), or $S = \dfrac{a \times AI}{2}$ et

$$S = \frac{AC . BJ}{2} = \frac{AC . AB \sin \hat{A}}{2} = \frac{bc \sin \hat{A}}{2} \quad \text{donc } I_1I_2 = 2 . \frac{2S}{a} . \frac{2S}{bc} = \frac{8 . S^2}{abc} . \quad \text{CQFD}$$

M varie sur la diag. BD du carré ABCD, les projetés de M sur [AB] et [AD] sont Q et P. Montrer que (CM) ⊥ (PQ)



1re solution : La preuve est facilitée par l'introduction d'un repère.

Repère $\mathcal{R} = (B, \vec{BC}, \vec{BA})$.

$$C\begin{pmatrix} \ell \\ 0 \end{pmatrix} \quad M\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad P\begin{pmatrix} t \\ \ell \end{pmatrix} \quad Q\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vec{CM}.\vec{PQ} = \begin{pmatrix} t-\ell \\ t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -t \\ t-\ell \end{pmatrix} = 0$$

2^e solution : En posant $AP = p$ et $AQ = q$,

$$\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{AQ} = -p\vec{AD} + q\vec{AB} = q\vec{AB} - p\vec{AD}$$

$$\begin{aligned} \vec{CM} &= \vec{CB} + \vec{BA} + \vec{AQ} + \vec{QM} \\ &= -\vec{AD} - \vec{AB} + q\vec{AB} + p\vec{AD} \\ &= (q-1)\vec{AB} + (p-1)\vec{AD} \end{aligned}$$

donc
$$\begin{aligned} \vec{PQ}.\vec{CM} &= q(q-1)AB^2 - p(p-1)AD^2 \\ &= (q(q-1) - p(p-1))AB^2 \end{aligned}$$

L'observation du rectangle MP_1BQ de la figure ci-dessus mq $p = 1-q$, d'où $\vec{PQ}.\vec{CM} = 0$